35 方程式・不等式への応用

298

接点を$\left(t,\ t^3-2t+1\right)$とすると，接線の方程式は$y'=3x^2-2$より，

$y=\left(3t^2-2\right)\left(x-t\right)+t^3-2t+1$ $\quad\therefore y=\left(3t^2-2\right)x-2t^3+1$

よって，点 A を通る接線が満たす式は$a=\left(3t^2-2\right)\cdot 2-2t^3+1$

すなわち$a=-2t^3+6t^2-3$

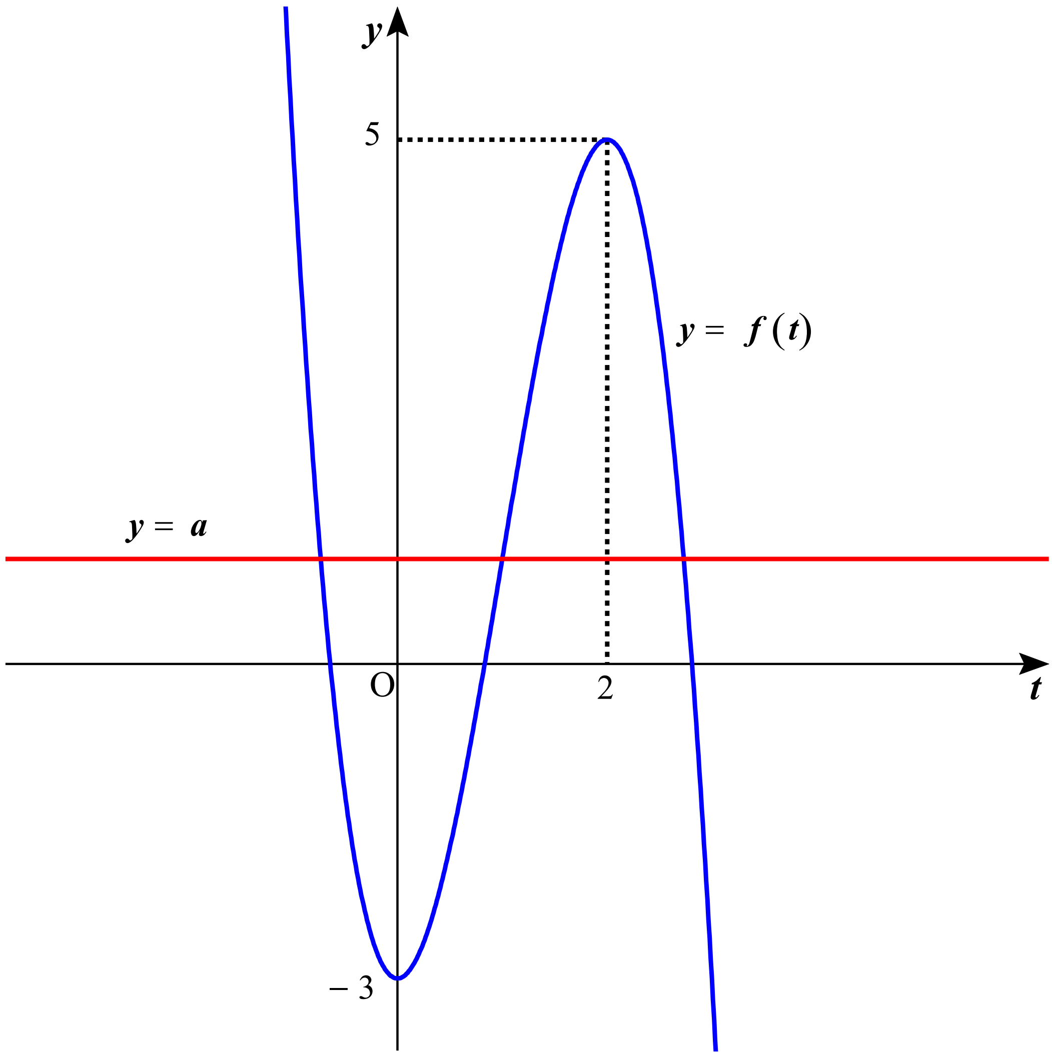
したがって，これを満たす異なるtの値が 3 つあればよく，これは$y=f(t)=-2t^3+6t^2-3$とおくと，曲線$y=f(t)$と直線$y=a$が異なる 3 つの共有点をもつことと同値である。

$y=f(t)$の増減は，$f'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$より，次表のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\downarrow$	-3	$\uparrow$	5	$\downarrow$

よって，$y=f(t)$の概形は次図のようになる。

ゆえに，この曲線と$y=a$が異なる 3 つの共有点をもつときのaの値の範囲は$-3<a<5$



299

$27^x - 3^{2x+1} + a = 3^{3x} - 3\cdot 3^{2x} + a = \left(3^x\right)^3 - 3\cdot\left(3^x\right)^2 + a$ より，

$3^x = t$ とおくと，$t^3 - 3t^2 + a = 0\ (t>0)$　$\therefore a = -t^3 + 3t^2\ (t>0)$　・・・①

曲線 $t = 3^x$ は単調に増加するから x と t は 1 対 1 に対応する。

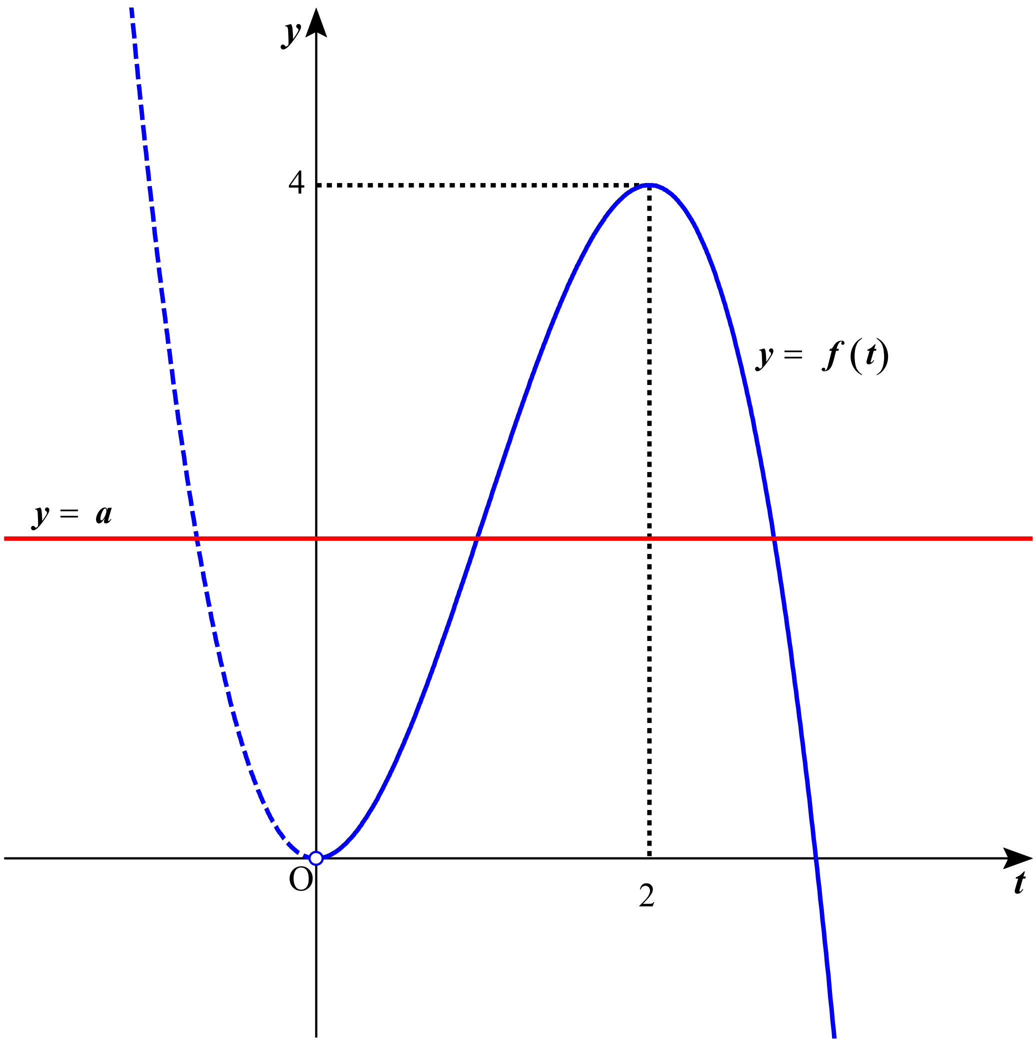
よって，①が異なる 2 実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めればよく，これは，$y = f(t) = -t^3 + 3t^2\ (t>0)$ とおくと，曲線 $y = f(t)$ と直線 $y = a$ が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めることと同値である。

$y = f(t)$ の増減は，$f'(t) = -3t^2 + 6t = -3t(t-2)$ より，次表のようになる。

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	/	+	0	−
$f(t)$	(0)	↑	4	↓

よって，$y = f(t)$ の概形は次図青色実線のようになる。

ゆえに，この曲線と $y = a$ が異なる 2 つの共有点をもつときの a の値の範囲は $0 < a < 4$



300

$x^3-3x^2-k(3x^2-12x-4)=x^3-3(k+1)x^2+12kx+4k$ より，

$f(x)=x^3-3(k+1)x^2+12kx+4k$ とおくと，$x\geq 0$ において，$f(x)\geq 0$ となるような k の値の範囲を求めればよい。

$$f'(x)=3x^2-6(k+1)x+12k$$
$$=3(x-2)(x-2k)$$

より，

(i) $k<1$ のとき

$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$2k$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↑	極大	↓	極小	↑

よって，極小値 $f(2)=16k-4\geq 0$ が必要であり，

このとき $2k<0$ のときは $f(0)$ は極大値と極小値の間の値をとるから，$f(0)>0$

$0<2k$ のときは $f(0)\geq 0$ を満たさなければならない。

ゆえに，必要十分条件は $f(2)=16k-4\geq 0$ かつ $f(0)=4k\geq 0$ であり，これより，$k\geq\dfrac{1}{4}$

これと，$k<1$ より，$\dfrac{1}{4}\leq k<1$

(ii) $k=1$ のとき

$f'(x)=3(x-2)^2\geq 0$ より，$f(x)$ は単調増加する。

よって，$f(0)=4k\geq 0$，すなわち $k\geq 0$ であればよい。ゆえに，$k=1$ はこれを満たす。

(iii) $k>1$ のとき

$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↑	極大	↓	極小	↑

よって，$f(0)\geq 0$ かつ $f(2k)\geq 0$ であればよい。

$f(0)=4k$ より，$k\geq 0$　・・・①

$f(2k)=-4k^3+12k^2+4k=-4k(k^2-3k-1)$ より，$k(k^2-3k-1)\leq 0$

よって，$k\leq\dfrac{3-\sqrt{13}}{2},\ 0\leq k\leq\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$　・・・②

①かつ②および $k>1$ より，$1<k\leq\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

(i)～(iii)の少なくとも 1 つを満たせばよいから，求める k の値の範囲は $\dfrac{1}{4}\leq k\leq\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

301

$y=f(x)=x^3-3ax^2+a+b$ とおくと，$y=f(x)$ が x 軸と 3 つの異なる共有点をもち，かつその 1 つの共有点の x 座標が負であればよい。

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$ より，

(i) $a<0$ のとき

$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↑	極大	↓	極小	↑

よって，x 軸と異なる 3 つの共有点をもつために必要十分条件は，

$f(2a)>0$ かつ $f(0)<0$ である。

このときの共有点の x 座標を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると，$\alpha<2a<\beta<0<\gamma$ となる。

すなわち 2 つの共有点の x 座標が負となる。

よって，不適

(ii) $a=0$ のとき

$f'(x)=3x^2\geq 0$ より，$y=f(x)$ は単調に増加する。

よって，x 軸との共有点は 1 つだけである。

ゆえに，不適

(iii) $a>0$ のとき

$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↑	極大	↓	極小	↑

よって，x 軸と異なる 3 つの共有点をもつために必要十分条件は，

$f(0)=a+b>0$ かつ $f(2a)=-4a^3+a+b<0$

また，このときの共有点の x 座標を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると，$\alpha<0<\beta<2a<\gamma$ となる。

すなわち 1 つの共有点の x 座標が負となり，条件を満たす。

ゆえに，$a+b>0$ かつ $-4a^3+a+b<0$

(i)～(iii)の少なくとも 1 つを満たせばよいから，求める条件は，

$a>0$ かつ $a+b>0$ かつ $-4a^3+a+b<0$

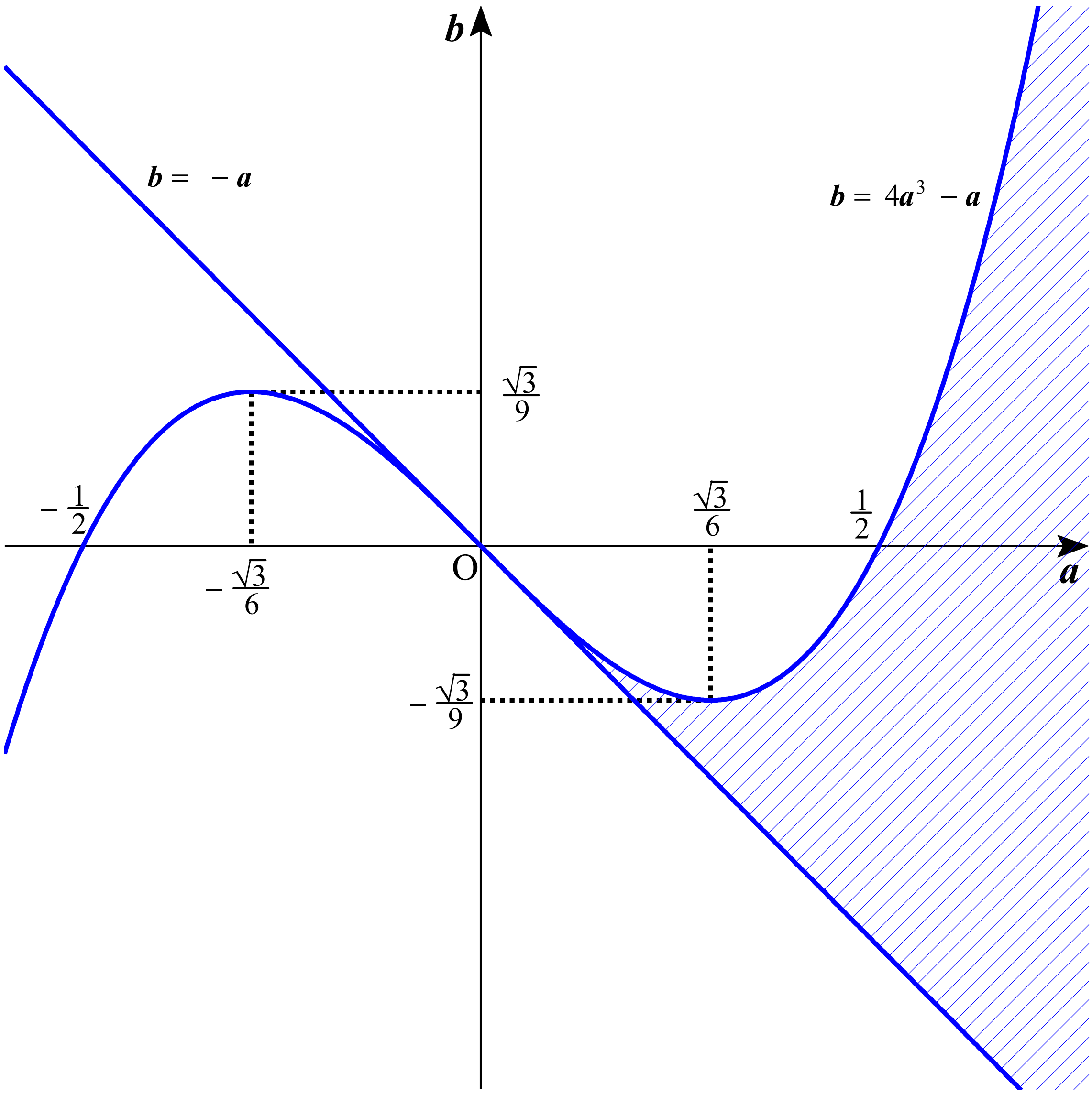
点$(a,\ b)$の領域の図示

$a>0$ かつ $b>-a$ かつ $b<4a^3-a=a(2a+1)(2a-1)$

$b=4a^3-a$ の増減は $b'=12a^2-1=12\left(a-\dfrac{1}{12}\right)=12\left(a+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(a-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$ より，次表のようになる。

b	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$	$\cdots$
b'	$+$	0	$-$	0	$+$
b	$\uparrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{9}$	$\downarrow$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$	$\uparrow$

以上より，下図斜線部の領域（境界線を含まない）



302

(1)

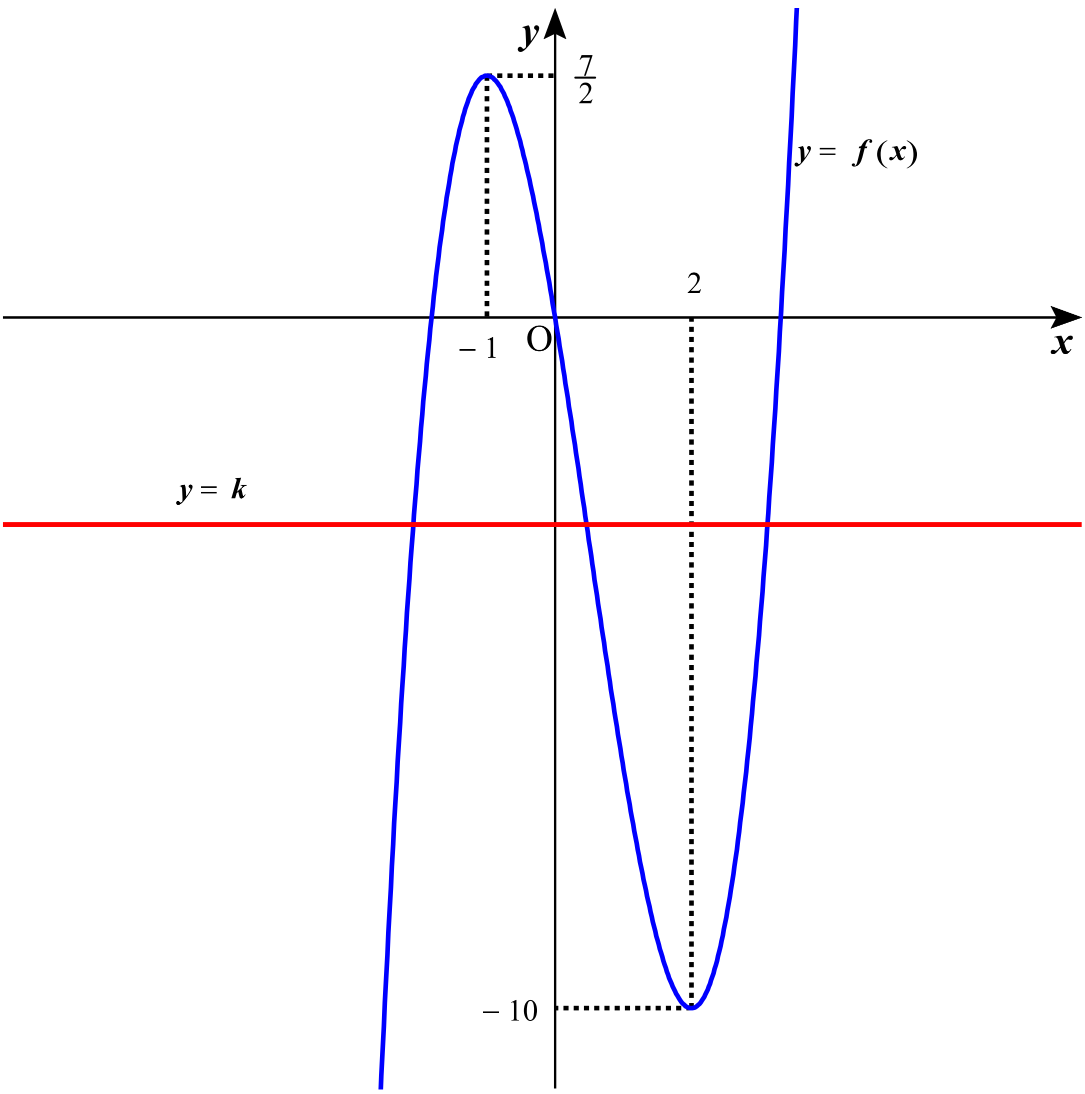
$k = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$ より，$y = f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$ とおくと，直線 $y = k$ と曲線 $y = f(x)$ が異なる 3 つの共有点をもつような k の値の範囲を求めることと同値である。

$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2)$ より， $f(x)$ の増減は次表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	$\frac{7}{2}$	$\downarrow$	-10	$\uparrow$

よって， $y = f(x)$ の概形は次図青色実線のようになる。

ゆえに，求める k の値の範囲は $-10 < k < \frac{7}{2}$



(2)

(a)

$f(x)$ の値が極大値 $\frac{7}{2}$ と等しく，$x=-1$ でない x 座標

$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x=\frac{7}{2}$ より，$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-\frac{7}{2}=0$

これと，$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}(x+1)^2(2x-7)$ より，$(x+1)^2(2x-7)=0$　$\therefore x=\frac{7}{2}$

$f(x)$ の値が極小値 -10 と等しく，$x=2$ でない x 座標

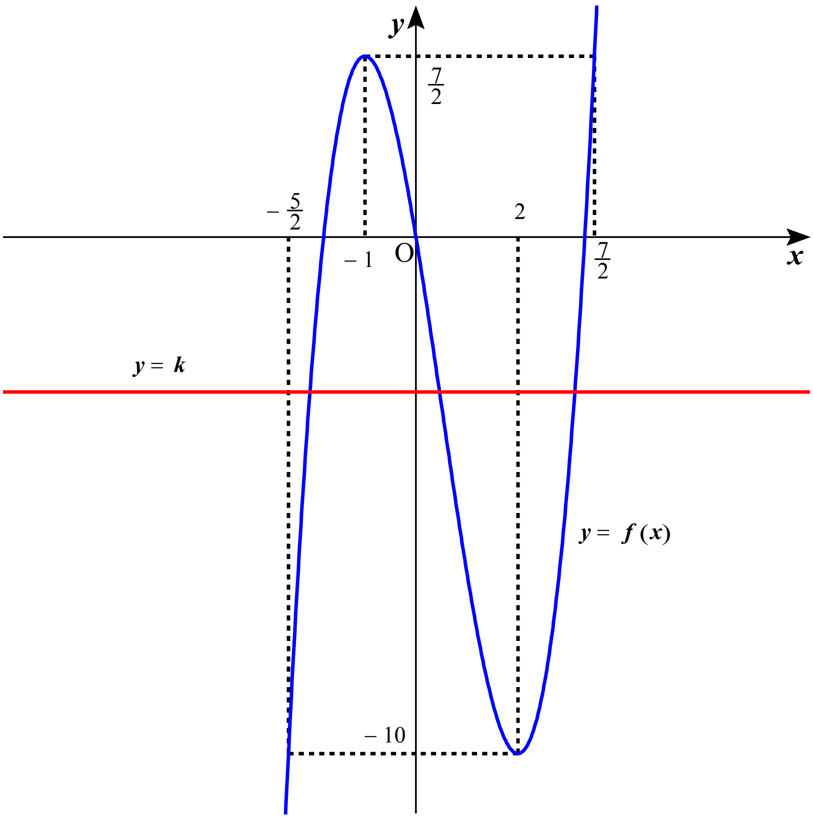
$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x=-10$ より，$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+10=0$

これと，$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+10=\frac{1}{2}(x-2)^2(2x+5)$　$\therefore x=-\frac{5}{2}$

よって，異なる 3 つの実数解をもつとき，すなわち $-10<k<\frac{7}{2}$ のとき，

$f\left(-\frac{5}{2}\right)<k$，$f(-1)>k$，$f(2)<k$，$f\left(\frac{7}{2}\right)>k$

ゆえに，$-\frac{5}{2}<\alpha<-1$，$-1<\beta<2$，$2<\gamma<\frac{7}{2}$



(b)

$\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$ は $x^2-\dfrac{3}{2}x-6x-k=0$ の解だから，解と係数の関係より，

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{3}{2}$　・・・①

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6$　・・・②

$\alpha\beta\gamma=k$　・・・③

②より，$\alpha\gamma=-\beta(\alpha+\gamma)-6$　・・・④

①より，$\alpha+\gamma=-\beta+\dfrac{3}{2}$　・・・⑤

④，⑤より，

$$\begin{aligned}\alpha\gamma&=-\beta\left(-\beta+\frac{3}{2}\right)-6\\&=\beta^2-\frac{3}{2}\beta-6\\&=\left(\beta-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{105}{16}\end{aligned}$$

これと，$-1<\beta<2$ より，

$\alpha\gamma$ は $\beta=\dfrac{3}{4}$ のとき最小値 $-\dfrac{105}{16}$ をとる。　・・・(答)

また，このとき $k=\alpha\beta\gamma=\alpha\gamma\cdot\beta=-\dfrac{105}{16}\cdot\dfrac{3}{4}=-\dfrac{315}{64}$　・・・(答)

303

円 C_2 の方程式は，条件より，$x^2+y^2=1 \quad \therefore x^2+y^2-1=0$

これに，$y=ax^3-1$ を代入すると，$x^2+\left(ax^3-1\right)^2-1=0$ より，$x^2\left(a^2x^4-2ax+1\right)=0$

よって，$x=0$，$a^2x^4-2ax+1=0$
$x=0$ のとき $y=-1$ より，$(x,\ y)=(0,\ -1)$ となり，これは点 P である。

したがって，$a^2x^4-2ax+1=0$ がただ 1 つの実数解をもてばよく，
これは，$f(x)=a^2x^4-2ax+1$ とおくと，
曲線 $f(x)$ が x 軸とただ 1 つの共有点をもつことと同値である。

そこで，$f(x)$ の増減を調べると，$f'(x)=4a^2x^3-2a=4a^2\left(x^3-\dfrac{1}{2a}\right)$ より，

次表のようになる。

x	$\cdots$	$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2a}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	極小	$\uparrow$

よって，極小値 $f\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2a}}\right)$ が 0 であればよい。

したがって，

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2a}}\right)=a^2\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2a}}\right)^4-2a\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2a}}+1$$

$$=a^2\cdot\frac{1}{2a}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2a}}-2a\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2a}}+1$$

$$=-\frac{3}{2}a\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2a}}+1$$

より，$-\dfrac{3}{2}a\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{2a}}+1=0 \quad \therefore \sqrt[3]{\dfrac{27a^2}{16}}=1$

両辺を 3 乗すると，$\dfrac{27a^2}{16}=1 \quad \therefore a^2=\dfrac{16}{27}$

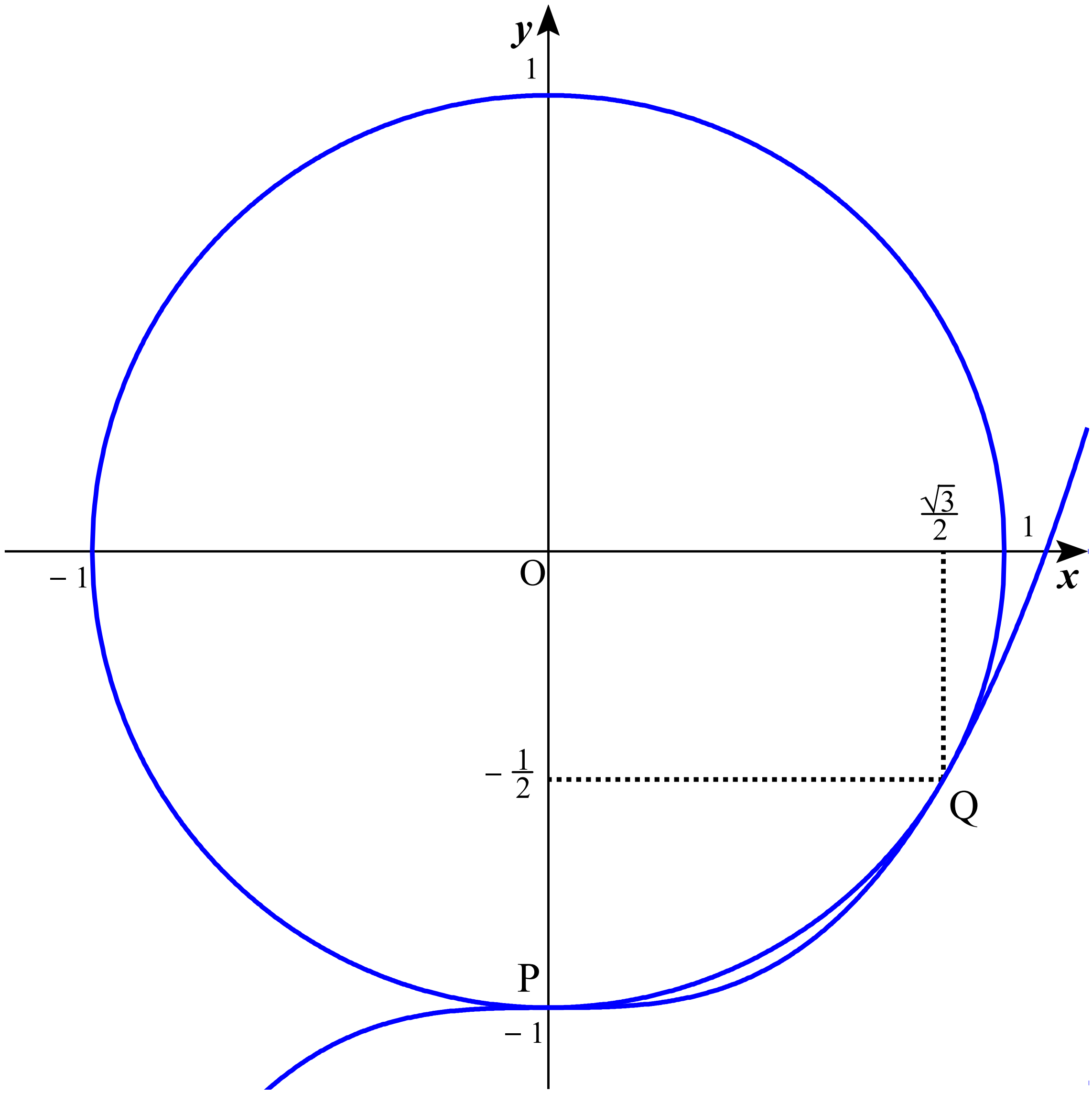
$a>0$ より，$a=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

このとき，

Q の x 座標は $x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2a}}=\sqrt[3]{\dfrac{9}{8\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Q の y 座標は $y=ax^3-1=a\cdot\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2a}}\right)^3-1=-\dfrac{1}{2}$．

以上より，$a=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$，Q$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$



304

(1)

解法 1

$y=m(x-p)+q$ が $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ で接するとすると，

接線の方程式は，$f'(x)=3x^2-1$ より，

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$

$=(3t^2-1)x-2t^3$

と表せる。

$y=m(x-p)+q$ すなわち $y=mx-mp+q$ と $y=(3t^2-1)x-2t^3$ が一致するから，

$m=3t^2-1$ より，$t^2=\dfrac{m+1}{3}$　$\therefore t^6=\left(\dfrac{m+1}{3}\right)^3$

$-mp+q=-2t^3$ より，$t^3=\dfrac{mp-q}{2}$　$\therefore t^6=\left(\dfrac{mp-q}{2}\right)^2$

ゆえに，$\left(\dfrac{m+1}{3}\right)^3=\left(\dfrac{mp-q}{2}\right)^2$

解法 2

$y=f(x)$ と $y=m(x-p)+q$ の接点の x 座標は $x^3-x=m(x-p)+q$

すなわち $x^3-(m+1)x+mp-q=0$　の重解である。

したがって，重解を α，もう 1 つの実数解を β とすると，

解と係数の関係より，

$2\alpha+\beta=0$　・・・①

$\alpha^2+2\alpha\beta=-(m+1)$　・・・②

$\alpha^2\beta=-mp+q$　・・・③

①より，$\beta=-2\alpha$

これを②，③に代入し，それぞれの式から β を消去すると，

$-3\alpha^2=-(m+1)$ より，$\alpha^2=\dfrac{m+1}{3}$　$\therefore \alpha^6=\left(\dfrac{m+1}{3}\right)^3$

$-2\alpha^3=-mp+q$ より，$\alpha^3=\dfrac{mp-q}{2}$　$\therefore \alpha^6=\left(\dfrac{mp-q}{2}\right)^2$

ゆえに，$\left(\dfrac{m+1}{3}\right)^3=\left(\dfrac{mp-q}{2}\right)^2$

補足

3 次方程式の型

1 つの実数解型，1 つの実数解と 2 つの重解型，3 つの異なる実数解型

(2)

条件を満たす接線と $y=f(x)$ の接点を $(t,\ f(t))$ とすると，

接線の方程式は，(1)の解法 1 より， $y=(3t^2-1)x-2t^3$

この接線は点 $(p,\ q)$ を通るから， $q=(3t^2-1)p-2t^3$ を満たす。

これを t について整理し， t の 3 次方程式にすると， $2t^3-3pt^2+p+q=0$

この方程式は異なる 3 つの実数解をもつことと， $y=g(t)=2t^3-3pt^2+p+q$ とおくと，

$y=g(t)$ が t 軸と異なる 3 つの共有点をもつことは同値である。

また， $y=g(t)$ が t 軸と異なる 3 つの共有点をもつための必要十分条件は，

$y=g(t)$ が 2 つの極値をもちかつそれらの積が負になることである。

よって， $g'(t)=6t^2-6pt=6t(t-p)$ より，

求める条件は $p\neq 0$ かつ $g(0)g(p)=(p+q)(-p^3+p+q)<0$ となるが，

$p=0$ とすると， $g(0)g(p)=q^2\geq 0$ より， $g(0)g(p)<0$ が成り立たないことから，

$p\neq 0$ は $g(0)g(p)<0$ に含まれる。

ゆえに，求める条件は， $(p+q)(-p^3+p+q)<0$

(3)

（ $p+q<0$ かつ $-p^3+p+q>0$ ）または（ $p+q>0$ かつ $-p^3+p+q<0$ ）

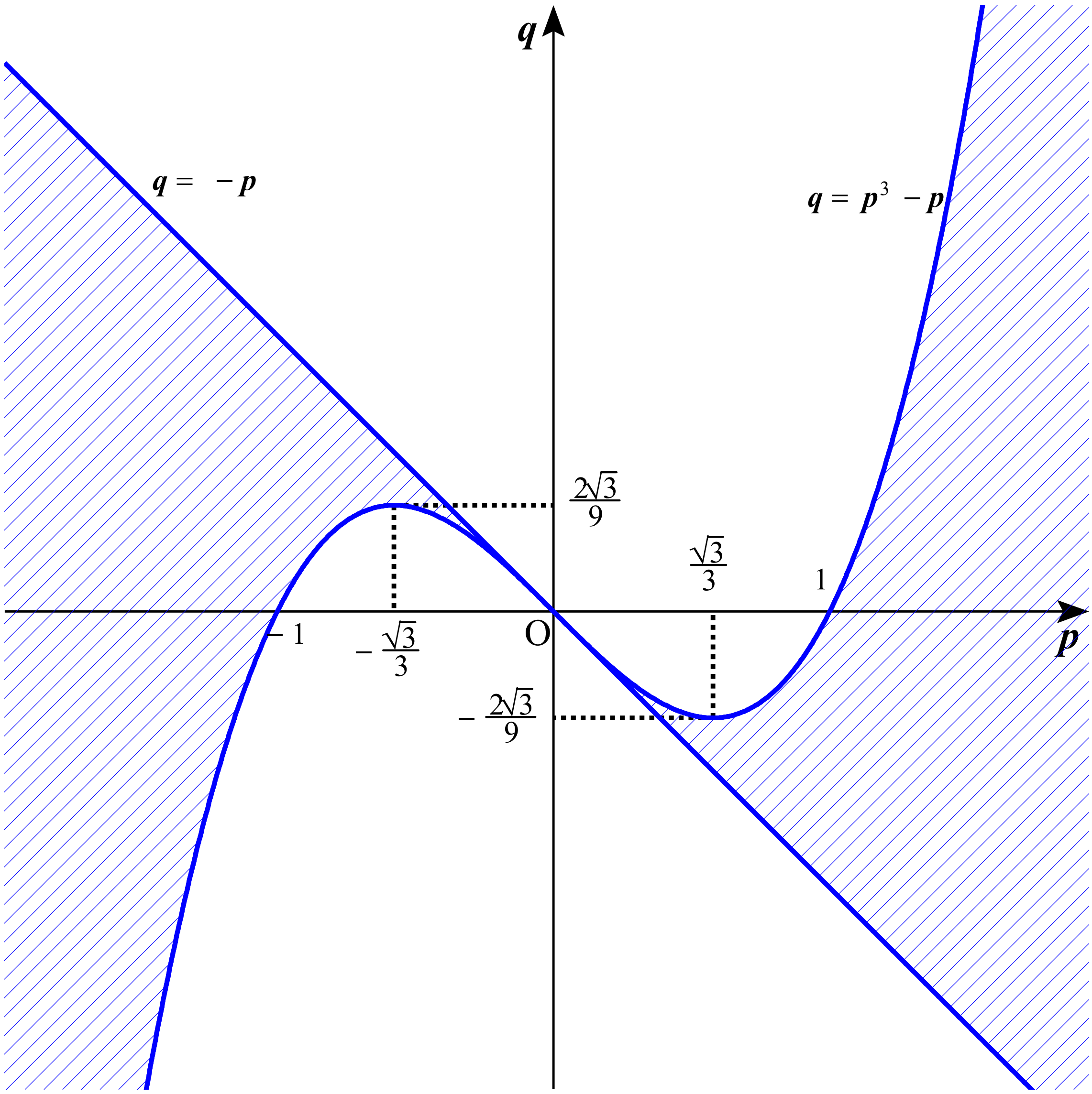
すなわち $p^3-p<q<-p$ または $-p<q<p^3-p$

また， $q'=3p^2-1=3\left(p+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(p-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ より， $q=p^3-p$ の増減は次表のようになる。

p	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
q'	$+$	0	$-$	0	$+$
q	$\uparrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\downarrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\uparrow$

よって，(2)の条件を満たす点 $(p,\ q)$ は次図のようになる。

ただし，境界線を含まない。


q
q = −p
q = p^3 − p
2√3/9
√3/3
1
−1
−√3/3
O
p
−2√3/9

305

(1)

解法 1

$f(x)=4x^3+1-kx$ とおく。

(i) $k\leq 0$ のとき

$x\geq 0$ において，$x^3\geq 0$ かつ $-kx\geq 0$ より，$f(x)\geq 0$ が成り立つ。

(ii) $k>0$ のとき

$$f'(x)=12x^2-k=12\left(x^2-\frac{k}{12}\right)=12\left(x+\frac{\sqrt{3k}}{6}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3k}}{6}\right)$$

より，$x\geq 0$ における $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3k}}{6}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↓	極小	↑

よって，$x\geq 0$ において，$f(x)$ は $x=\frac{\sqrt{3k}}{6}$ で最小値をとるから，

$f\left(\frac{\sqrt{3k}}{6}\right)=-\frac{k\sqrt{3k}}{9}+1\geq 0$ のとき，$f(x)\geq 0$ が成り立つ。

このとき，$\frac{k\sqrt{3k}}{9}\leq 1$ より，$\sqrt{3k^3}\leq\sqrt{81}$　$\therefore k^3\leq 27$

これと $k>0$ より，$0<k\leq 3$

(i)，(ii)より，$k\leq 3$

解法 2

k を大きくしていくと，ある k で $y=kx$ と $y=4x^3+1$ が接する。

このときの接点の x 座標は $4x^3+1=kx$ すなわち $4x^3-kx+1=0$ の重解である。

そこでこの方程式の重解を α，もう 1 つの解を β とすると，解と係数の関係より，

$2\alpha+\beta=0$ すなわち $\beta=-2\alpha$ ・・・①

$\alpha^2+2\alpha\beta=-\frac{k}{4}$ ・・・②

$\alpha^2\beta=-\frac{1}{4}$ ・・・③

①を③に代入し，β を消去すると，$-2\alpha^3=-\frac{1}{4}$　$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$ ・・・④

これを①に代入すると，$\beta=-1$ ・・・⑤

④と⑤を②に代入すると，$-\frac{3}{4}=-\frac{k}{4}$　$\therefore k=3$

よって，k を大きくしていくと，$k=3$ のとき，$y=kx$ と $y=4x^3+1$ が接する。

ゆえに，$x \geq 0$ において $4x^3+1 \geq kx$ が成り立つ k の値の範囲は $k \leq 3$

解法 3　略解

k を大きくしていくと，ある k で $y=kx$ と $y=4x^3+1$ が接する。

このとき接点の座標を $\left(t,\ 4t^3+1\right)$ $(t \geq 0)$ とすると，

接線の方程式は $y=12t^2(x-t)+4t^3+1$ すなわち $y=12t^2x-8t^3+1$

これが原点を通るから，$-8t^3+1=0\quad \therefore t=\dfrac{1}{2}$

したがって，その傾き $12t^2$ の値は 3

よって，求める k の値の範囲は $k \leq 3$

解法 4　数学Ⅲ

(i)　$x=0$ のとき

$1 \geq k \cdot 0$ より，k は任意の実数

(ii)　$x>0$ のとき

不等式の両辺を x（$x>0$）で割ると $4x^2+\dfrac{1}{x} \geq k$

$f(x)=4x^2+\dfrac{1}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=8x-\frac{1}{x^2}=\frac{8x^3-1}{x^2}=\frac{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}{x^2}=\frac{(2x-1)\left\{4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}}{x^2}$$ より，

$f(x)$ の $x>0$ における増減は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	∞	$\downarrow$	3	$\uparrow$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の最小値は 3 である。

ゆえに，k の値の範囲は $k \leq 3$

(i)，(ii)より，求める k の値の範囲は $k \leq 3$

(2)

(1)より，$4x^3+1 \geq 3x$，$4y^3+1 \geq 3y$

等号が成立するときの x の値は，$4x^3+1=3x$ から $x \geq 0$ を満たす解を直接求めてもいいが，

たとえば，(1)の解法 1 から求めると，

増減表において，$x=\dfrac{\sqrt{3k}}{6}$ で k に 3 を代入することにより，$x=\dfrac{1}{2}$

したがって，等号が成立するときの y の値も $\frac{1}{2}$

よって，

$$\frac{4(x^3+y^3)+5}{x+y+1}=\frac{4x^3+1+4y^3+1+3}{x+y+1}\geq\frac{3x+3y+3}{x+y+1}=3$$

等号成立は $x=y=\frac{1}{2}$ のとき

ゆえに，$x=y=\frac{1}{2}$ で最小値 3 をとる。

306

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}(\sin^3 x+\cos^3 x)+3\sin x\cos x&=2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)+3\sin x\cos x\\&=2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)+3\sin x\cos x\\&=4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(1-\sin x\cos x)+3\sin x\cos x\\&=4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x\cos x\left\{4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-3\right\}\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}(\sin x+\cos x)^2&=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\\&=1+2\sin x\cos x\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}\sin x\cos x&=\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}\\&=\frac{\left\{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2-1}{2}\\&=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}(\sin^3 x+\cos^3 x)+3\sin x\cos x&=4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\left\{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\right\}\left\{4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-3\right\}\\&=-4\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+6\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

より，$-4\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+6\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0$

両辺に-2を掛けると，$8\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-6\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-12\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3=0$

ここで，$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=t$ とおくと，$8t^3-6t^2-12t+3=0$

ただし，$0\leq x<2\pi$ より，$-1\leq t\leq 1$

よって，$8t^3-6t^2-12t+3=0$ （$-1\leq t\leq 1$）の解と対応するxの個数を求めればよい。

$8t^3-6t^2-12t+3=0$ （$-1\leq t\leq 1$）の解は$f(t)=8t^3-6t^2-12t+3$ の$-1\leq t\leq 1$におけるt軸との共有点のt座標の値と一致するから，$-1\leq t\leq 1$における$f(t)$の増減を調べると，

$f'(t)=24t^2-12t-12=12(2t+1)(t-1)$ より，次表のようになる。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\uparrow$	$\frac{13}{2}$	$\downarrow$	-7

よって，$f(t)=0$ となるtは，$-\frac{1}{2}<t<1$に存在する。

さらに，$-\frac{1}{2}<t<1$において，$f(t)=0$ となるtを絞り込むと，

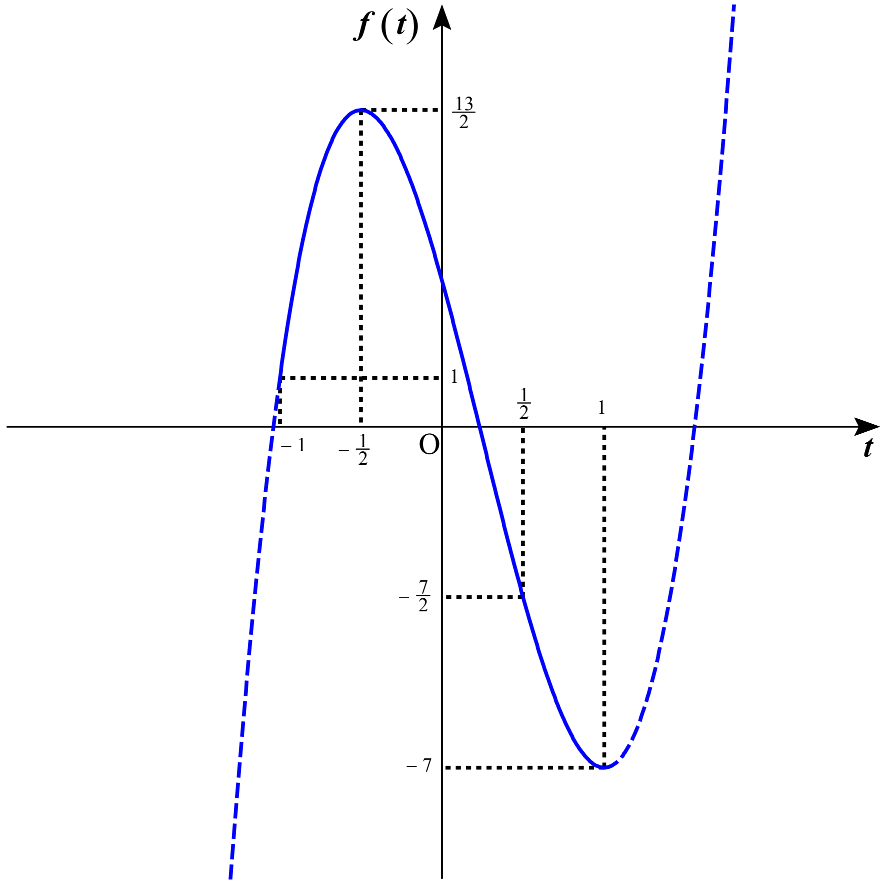
$f(0)=3>0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{2}<0$ より，$0<t<\frac{1}{2}$に存在する。

よって，$t=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ （$0\leq x<2\pi$）より，与式の方程式の解は，

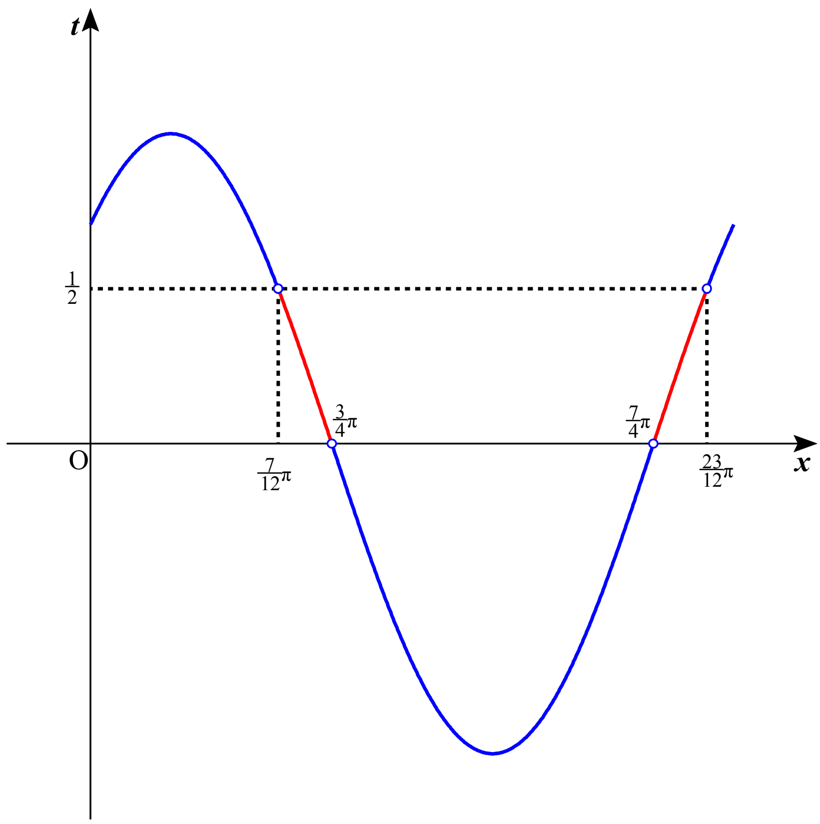
$\frac{5}{6}\pi<x+\frac{\pi}{4}<\pi$ と $2\pi<x+\frac{\pi}{4}<2\pi+\frac{\pi}{6}$

すなわち，$\frac{7}{12}\pi<x<\frac{3}{4}\pi$ と $\frac{7}{4}\pi<x<\frac{23}{12}\pi$ においてそれぞれ 1 つ存在する。

ゆえに，求めるxの個数は 2



f(t)
13/2
1
1/2
1
−1
−1/2
O
t
−7/2
−7



t
1/2
3/4π
7/4π
O
7/12π
23/12π
x

307

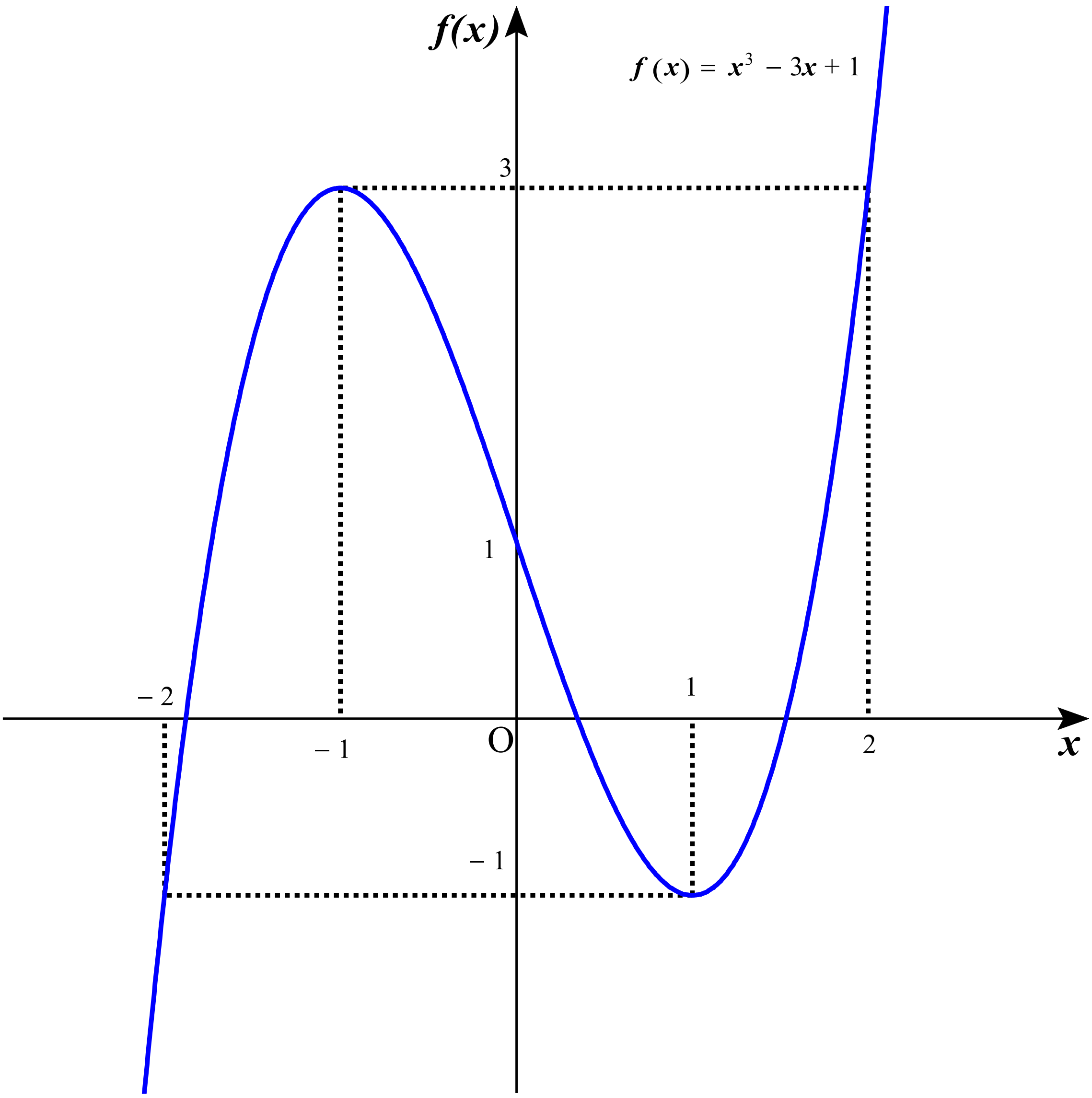
(1)

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ より，$-2\leq x\leq 2$ における $f(x)$ の増減は次表のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\uparrow$	3	$\downarrow$	-1	$\uparrow$	3

よって，$f(x)=0$ となる x は $-2<x<-1,\ -1<x<1,\ 1<x<2$ においてそれぞれ 1 つ存在する。

ゆえに，題意が成り立つ。



(2)

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) &= \{g(x)\}^3 - 3g(x) + 1 \\
&= (x^2 - 2)^3 - 3(x^2 - 2) + 1 \\
&= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 1 \\
&= (x^3 - 3x)^2 - 1 \\
&= (x^3 - 3x - 1)(x^3 - 3x + 1) \\
&= (x^3 - 3x - 1) f(x)
\end{aligned}
$$

よって，α が $f(x)=0$ の解すなわち $f(\alpha)=0$ ならば，

$f(g(\alpha)) = (\alpha^3 - 3\alpha - 1) f(\alpha)$ より，$f(g(\alpha)) = 0$

ゆえに，題意が成り立つ。

(3)

$x^3 - 3x + 1 = 0$ において，解と係数の関係より，$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$　・・・①

また，(1)より，$-2 < \alpha_1 < -1,\ -1 < \alpha_2 < 1,\ 1 < \alpha_3 < 2$ であるが，

α_2 の範囲を絞り込むと，$f(0) = 1 < 0,\ f(1) = -1 < 0$ より，$0 < \alpha_2 < 1$

よって，$\alpha_1 < 0 < \alpha_2 < \alpha_3$　・・・②

①，②より，$|\alpha_2| < |\alpha_3| < |\alpha_1|$

よって，$\alpha_2{}^2 < \alpha_3{}^2 < \alpha_1{}^2$ より，$\alpha_2{}^2 - 2 < \alpha_3{}^2 - 2 < \alpha_1{}^2 - 2$ すなわち $g(\alpha_2) < g(\alpha_3) < g(\alpha_1)$

これと，(2)より，$g(\alpha_1) = \alpha_3,\ g(\alpha_2) = \alpha_1,\ g(\alpha_3) = \alpha_2$